

Jaarringen

Op de foto zie je een doorgezaagde boomstam. Hierin zijn zogenaamde jaarringen te zien. Deze ontstaan doordat de boom in de zomer snel groeit: dan wordt er licht gekleurd hout gevormd. In de winter groeit de boom langzaam en wordt er donker gekleurd hout gevormd. Zo komt er elk jaar een ring bij, die uit een licht en een donker gedeelte bestaat: een jaarring.

foto



In deze opgave kijken we eerst naar de groeisnelheid van de diameter (G) van een grove den. Omdat een boom afwisselend snel en langzaam groeit, kun je deze groeisnelheid modelleren met behulp van sinusoiden.

Voor de groeisnelheid van de diameter van een grove den gelden de volgende eigenschappen:

- de groeisnelheid is drie maanden na het ontkiemen van het zaadje maximaal;
- de groeisnelheid is negen maanden na het ontkiemen minimaal;
- dit patroon herhaalt zich elk jaar;
- de maximale groeisnelheid is 2,1 cm per jaar;
- de minimale groeisnelheid is 0,3 cm per jaar.

Voor de groeisnelheid van de grove den kun je op basis van deze eigenschappen een formule opstellen van de vorm $G = a + b \sin(c(t - d))$. Hierin is G de groeisnelheid in cm per jaar en t de tijd in jaren na het ontkiemen.

- 4p 12 Bereken de waarden van a , b , c en d in deze formule. Licht je antwoord toe.

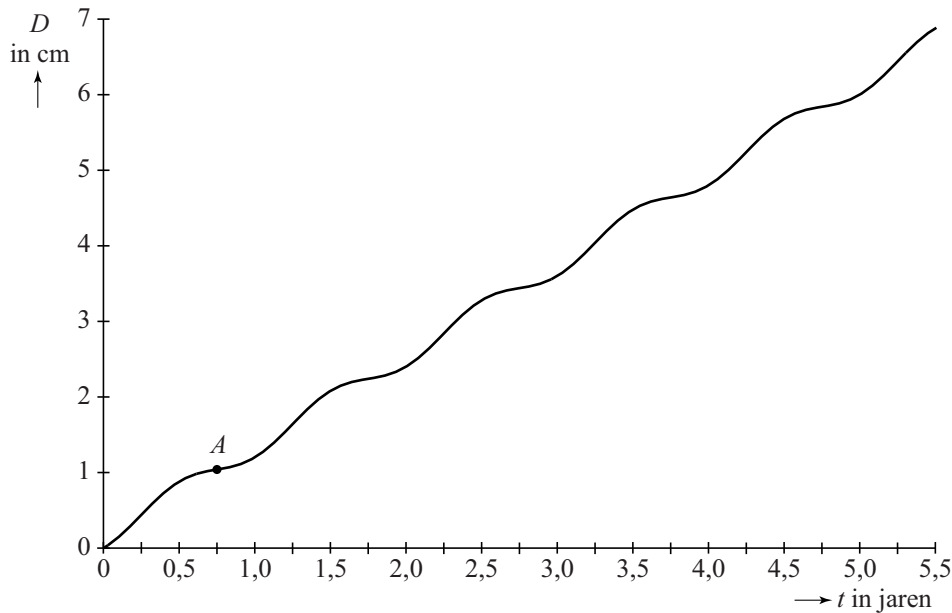
Nu bekijken we de diameter van de stam van deze grove den. Daarbij kan de volgende formule worden opgesteld:

$$D = 1,2t + 0,14 + 0,14 \sin(2\pi(t - 0,25))$$

Hierin is D de diameter van de stam in cm en t de tijd in jaren na het ontkiemen met $t = 0$ op het moment van ontkiemen.

De grafiek van D is in de figuur getekend. De grafiek staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



- 3p 13 Bereken met behulp van de formule op welk tijdstip de diameter een dikte van 5 cm bereikt. Rond je antwoord af op hele maanden.

In de grafiek is te zien dat de diameter schommelt rondom een lijn. De formule van deze lijn is $T=1,2t+0,14$.

In plaats van de diameter te berekenen met de formule voor D is deze ook te benaderen met behulp van de formule van de lijn. Deze benadering zal in de meeste gevallen iets afwijken van de diameter volgens de formule van D .

- 3p 14 Onderzoek hoe groot deze afwijking maximaal kan zijn.

De diameter van de grove den groeit in de eerste zes maanden na het ontkiemen meer dan in de tweede zes maanden na het ontkiemen. Dat wisselen van groeisnelheid herhaalt zich zo in de jaren daarna.

- 3p 15 Bereken met behulp van de formule van D hoeveel procent van de jaarlijkse groei in de eerste helft van het jaar plaatsvindt. Rond je antwoord af op gehele procenten.

In het begin van deze opgave staat vermeld dat de groeisnelheid van de diameter G na negen maanden ($t = 0,75$) minimaal is, namelijk 0,3 cm per jaar. De minimale groeisnelheid bij $t = 0,75$ die met de formule van D berekend wordt (zie punt A in de grafiek), is niet precies gelijk aan 0,3 cm per jaar.

- 3p 16 Geef in de grafiek van D op de uitwerkbijlage nog een ander punt dan punt A aan waar de groeisnelheid volgens de formule van D minimaal is en bereken de minimale groeisnelheid in cm/jaar met de grafische rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.

